Wzory i definicje, których nie ma w tablicach matematycznych dostępnych na maturze

Zero i okolice / www.zeroiokolice.pl

kwiecień 2022

W tej karcie oprócz wzorów pojawiają się różne nazwy i definicje. Nie musisz się ich uczyć na pamięć słowo w słowo - chodzi jedynie o to, byś je rozumiał/rozumiała. Nikt na maturze nie każe Ci napisać definicji dwusiecznej - natomiast to słowo może pojawić się w treści zadania i chciałabym, żebyś wiedział/wiedziała, co ono oznacza :)

1 Podstawowe pojęcia

Liczby należące do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5...\}$ nazywamy **liczbami naturalnymi**. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbb{N}$.

Liczby należące do zbioru $\{... - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$ nazywamy **liczbami całkowitymi**. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą $\mathbb{C}$.

Liczby rzeczywiste to wszystkie liczby, które znasz (liczby całkowite, ułamki, pierwiastki itd.). Oznaczamy je literą $\mathbb{R}$.

Nazwy działań:

- suma - wynik dodawania
- różnica - wynik odejmowania
- iloczyn - wynik mnożenia
- iloraz - wynik dzielenia

Jeżeli mamy ułamek postaci $\frac{a}{b}$, to a nazywamy **licznikiem**, natomiast b **mianownikiem** ($b \neq 0$).

2 Pierwiastki

Mnożenie pierwiastków:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{1}$$

Dzielenie pierwiastków:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{2}$$

Usuwanie niewymierności z mianownika:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \tag{3}$$

3 Funkcje

Dziedzina funkcji to zbiór wszystkich **x**-ów (czyli **argumentów**), jakie przyjmuje funkcja. Oznaczamy ją jako D.

Zbiór wartości funkcji to zbiór wszystkich y-ów, jakie przyjmuje funkcja. Oznaczamy go jako ZW.

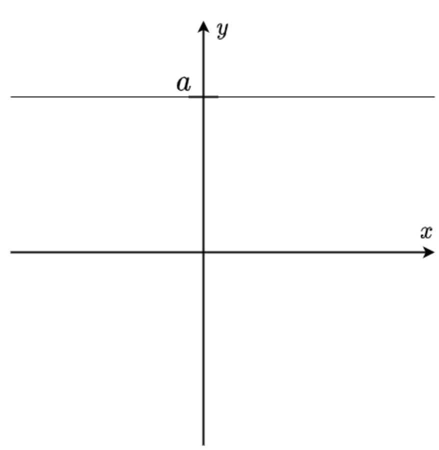
Miejsce zerowe funkcji to argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0; jeśli funkcja przecina oś Ox w punkcie $(x_0, 0)$, to liczba x_0 jest jej miejscem zerowym.

Równanie prostej poziomej:

Jeżeli pozioma prosta przecina oś Oy w punkcie $(0, a)$ (zobacz rysunek 1), to dana jest ona równaniem:

$$y = a \tag{4}$$

Rysunek 1:

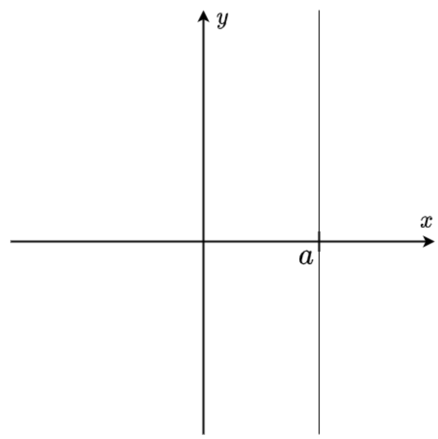


Równanie prostej pionowej:

Jeżeli pionowa prosta przecina oś Ox w punkcie $(a, 0)$ (zobacz rysunek 2), to dana jest ona równaniem:

$$x = a \tag{5}$$

Rysunek 2:



Przesunięcie wykresu funkcji:

Jeśli wykres funkcji $f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo, to otrzymamy wykres funkcji $f(x - a)$, natomiast jeśli przesuniemy go o a jednostek w lewo, otrzymamy wykres funkcji $f(x + a)$.

Jeśli wykres funkcji $f(x)$ przesuniemy o b jednostek do góry, to otrzymamy wykres funkcji $f(x) + b$, natomiast jeśli przesuniemy go o b jednostek w dół, otrzymamy wykres funkcji $f(x) - b$.

3.1 Funkcja liniowa

Wzór funkcji liniowej:

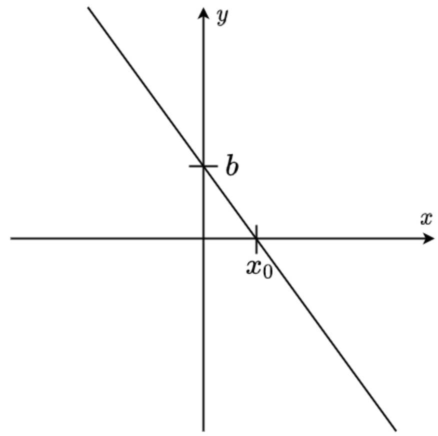
$$f(x) = ax + b \tag{6}$$

Znaczenie wzpółczynników we wzorze funkcji liniowej:

Jeżeli $a > 0$, to funkcja jest rosnąca, natomiast jeśli $a < 0$, to funkcja jest malejąca.

Punkt przecięcia funkcji z osią Oy ma postać $(0, b)$ (zobacz rysunek 3).

Rysunek 3:



Miejsce zerowe funkcji liniowej (zobacz rysunek 3):

$$x_0 = -\frac{b}{a} \tag{7}$$

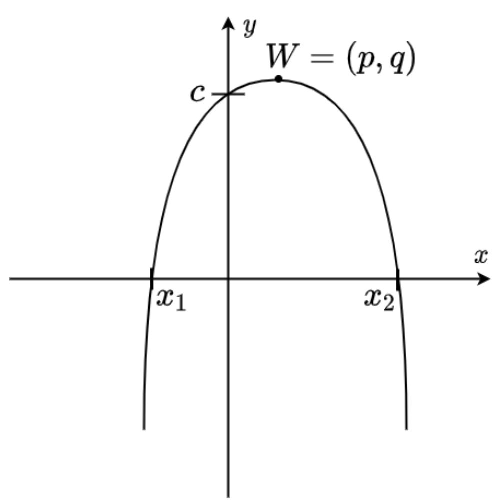
3.2 Funkcja kwadratowa

Wierzchołek paraboli:

Jeżeli funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2, to współrzędna x-owa wierzchołka paraboli (zobacz rysunek 4) dana jest wzorem:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{8}$$

Rysunek 4:



Jeżeli funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe x_0, to $p = x_0$.

Znaczenie współczynnika c we wzorze funkcji kwadratowej:

Punkt przecięcia funkcji z osią Oy ma postać $(0, c)$ (zobacz rysunek 4).

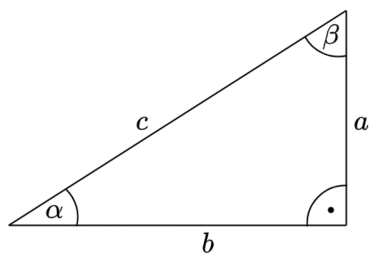
4 Trygonometria

Jeżeli trójkąt prostokątny ma kąty ostre α oraz β (zobacz rysunek 5), to wtedy:

$$\sin\alpha = \cos\beta \tag{9}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta \tag{10}$$

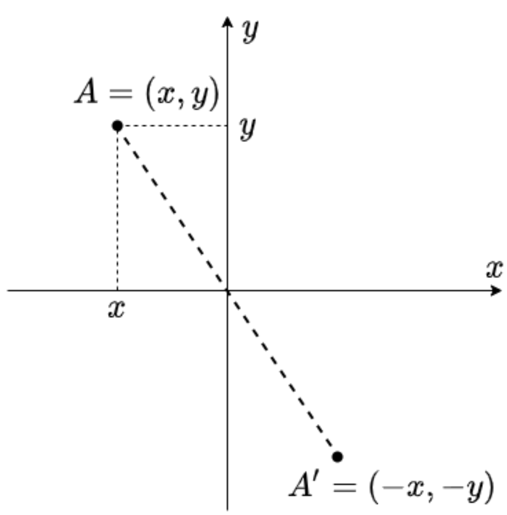
Rysunek 5:



5 Geometria analityczna

Symetria względem początku układu współrzędnych przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, -y)$ (zobacz rysunek 6).

Rysunek 6:



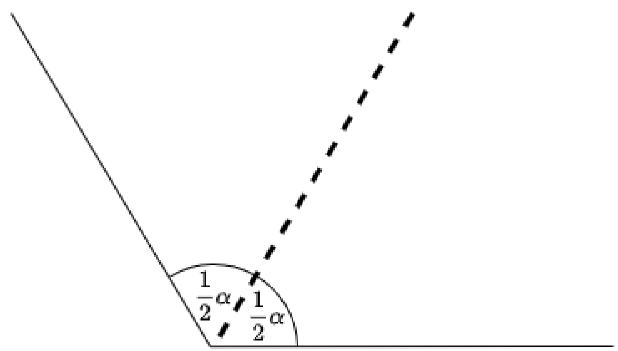
Współczynnik kierunkowy a prostej przechodzącej przez punkty $A=(x_A,y_A)$ oraz $B=(x_B,y_B)$ dany jest wzorem:

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \tag{11}$$

6 Planimetria

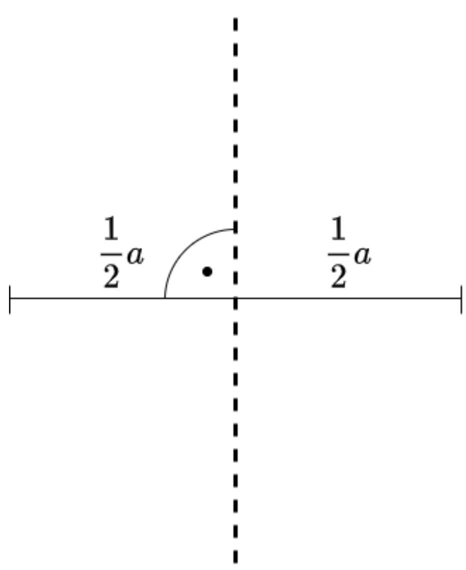
Dwusieczną kąta α nazywamy półprostą, która dzieli ten kąt na dwie połowy (zobacz rysunek 7).

Rysunek 7:



Symetralną odcinka a nazywamy prostą prostopadłą do odcinka, która dzieli go na dwie połowy (zobacz rysunek 8).

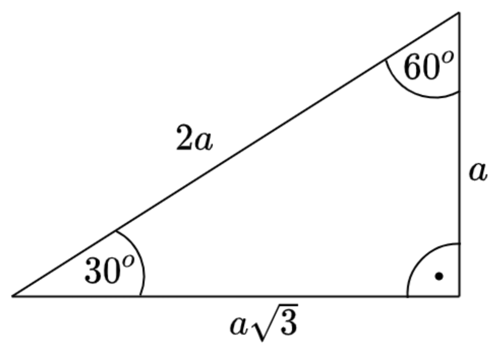
Rysunek 8:



Trójkąty prostokątne:

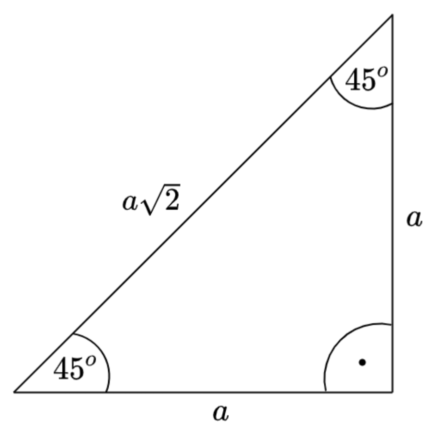
Jeżeli trójkąt prostokątny ma kąty ostre o rozwartości 30^o oraz 60^o, a bok naprzeciwko kąta 30^o ma długość a, to bok naprzeciwko kąta 60^o ma długość $a\sqrt{3}$, natomiast przeciwprostokątna ma długość $2a$ (zobacz rysunek 9).

Rysunek 9:



Jeżeli trójkąt prostokątny ma 2 kąty ostre o rozwartości 45^o oraz przyprostokątne o długości a, to przeciwprostokątna ma długość $a\sqrt{2}$ (zobacz rysunek 10).

Rysunek 10:



Wielokąt foremny to wielokąt, który ma wszystkie boki takiej samej długości oraz wszystkie kąty o takiej samej rozwartości.

Kwadrat:

Jeżeli dany jest kwadrat o boku a i przekątnej d (zobacz rysunek 11), to wtedy:

$$d = a\sqrt{2} \tag{12}$$

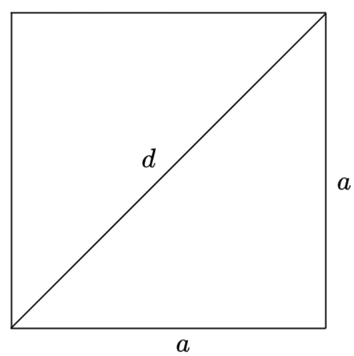
lub równoważnie:

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} \tag{13}$$

Pole tego kwadratu jest równe:

$$P = a^2 = \frac{d^2}{2} \tag{14}$$

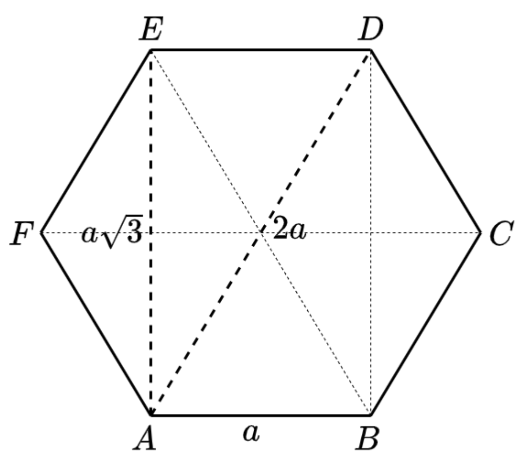
Rysunek 11:



Sześciokąt foremny:

Jeżeli dany jest sześciokąt foremny o boku a, to jego krótsze przekątne mają długość $a\sqrt{3}$, a dłuższe przekątne mają długość $2a$ (zobacz rysunek 12).

Rysunek 12:



Pole sześciokąta o boku a jest równe polu sześciu trójkątów równobocznych o boku a:

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \tag{15}$$

Liczba π:

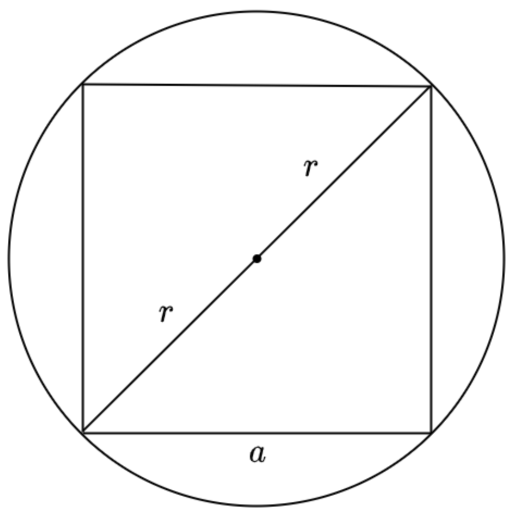
$$\pi \approx 3,14 \approx \frac{22}{7} \tag{16}$$

Okrąg opisany na kwadracie:

Jeżeli okrąg o promieniu r jest opisany na kwadracie o boku a (zobacz rysunek 13), to wtedy:

$$2r = a\sqrt{2} \tag{17}$$

Rysunek 13:

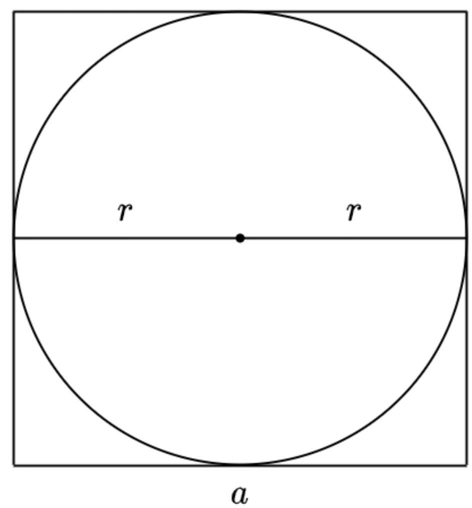


Okrąg wpisany w kwadrat:

Jeżeli okrąg o promieniu r jest wpisany w kwadrat o boku a (zobacz rysunek 14), to wtedy:

$$2r = a \tag{18}$$

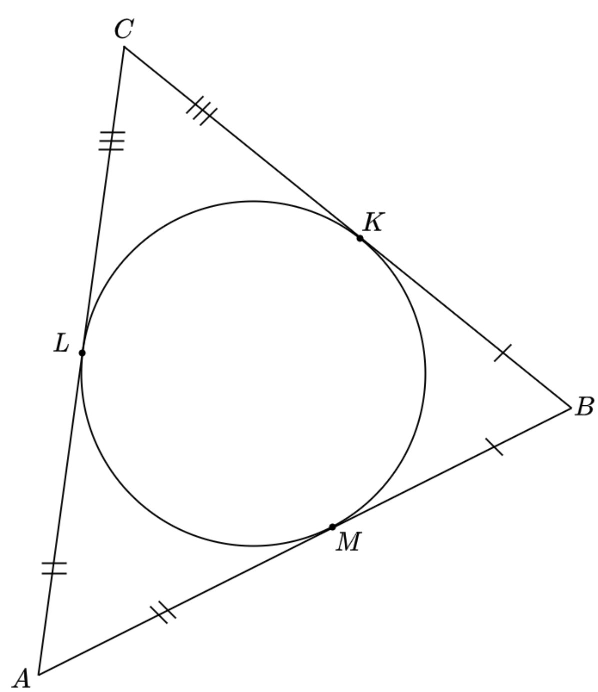
Rysunek 14:



Okrąg wpisany w trójkąt:

Jeżeli w trójkąt ABC wpisany jest okrąg i jest on styczny do boków trójkąta w punktach K, L i M (zobacz rysunek 15), to $|AM| = |AL|$, $|BM| = |BK|$ oraz $|CK| = |CL|$.

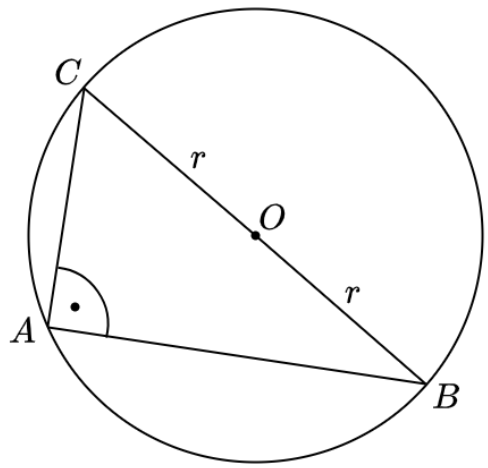
Rysunek 15:



Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym:

Jeżeli okrąg o promieniu r jest opisany na trójkącie ABC i bok BC przechodzi przez środek okręgu, to trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym. Kąt BAC jest kątem prostym, a przeciwprostokątna BC jest średnicą okręgu (zobacz rysunek 16).

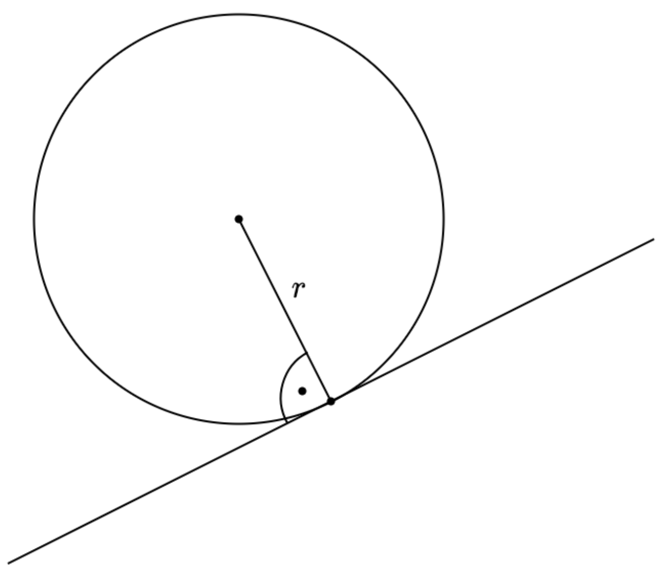
Rysunek 16:



Prosta styczna do okręgu:

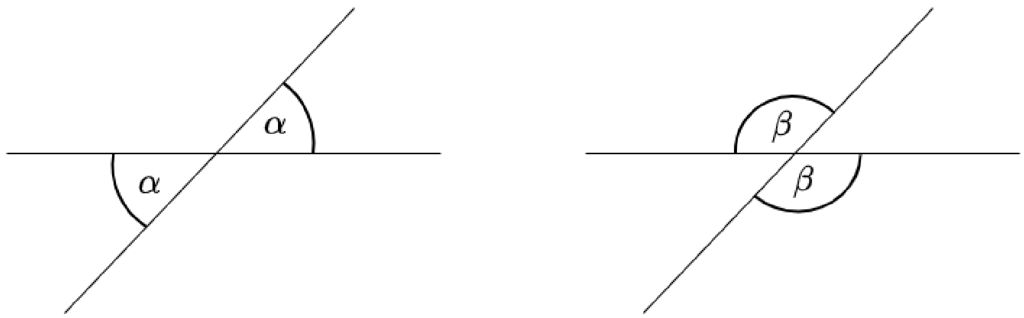
Jeżeli prosta jest styczna do okręgu, to kąt pomiędzy prostą a promieniem poprowadzonym do punktu styczności jest kątem prostym (zobacz rysunek 17).

Rysunek 17:



Kąty wierzchołkowe to para kątów leżących naprzeciwko siebie, utworzonych poprzez przecięcie dwóch prostych. Kąty te mają taką samą miarę (zobacz rysunek 18). Ponadto $\alpha + \beta = 180^o$.

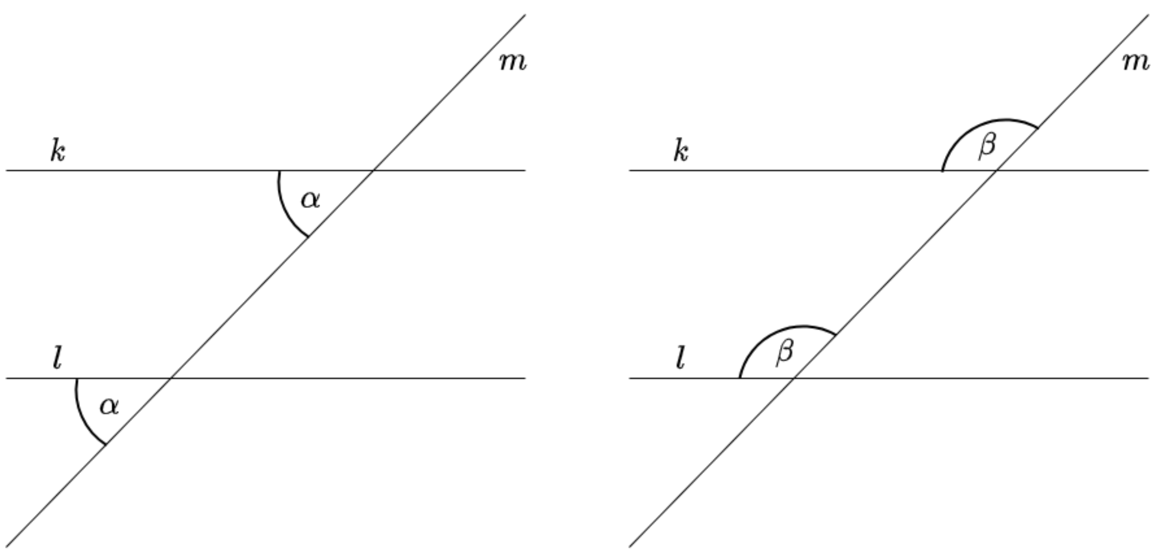
Rysunek 18:



Jeżeli **dwie proste równoległe** k oraz l przetniemy prostą m, to taką samą miarę będą miały następujące kąty:

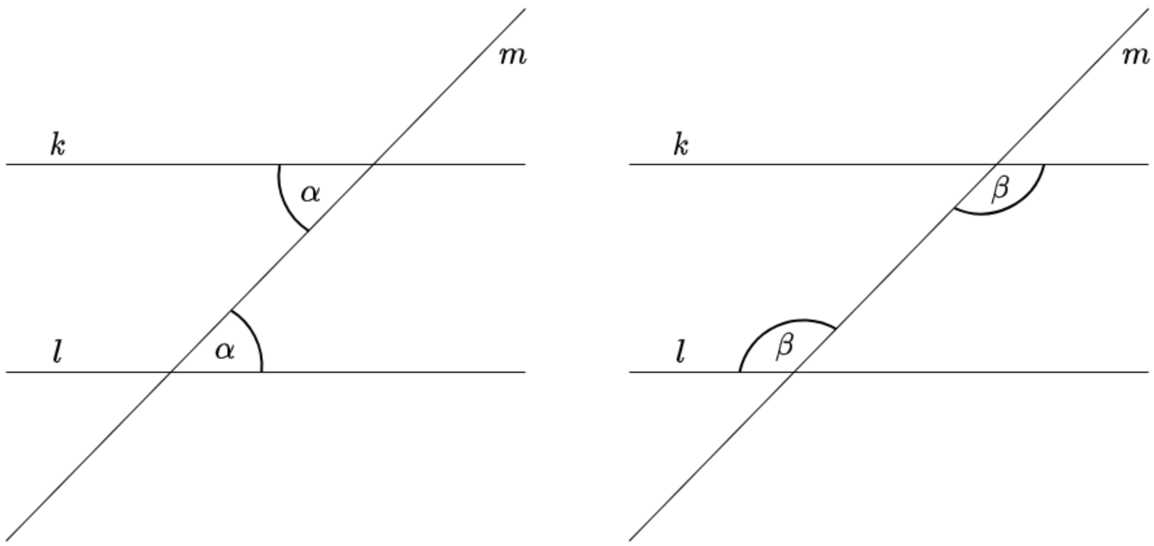
kąty odpowiadające (zobacz rysunek 19):

Rysunek 19:

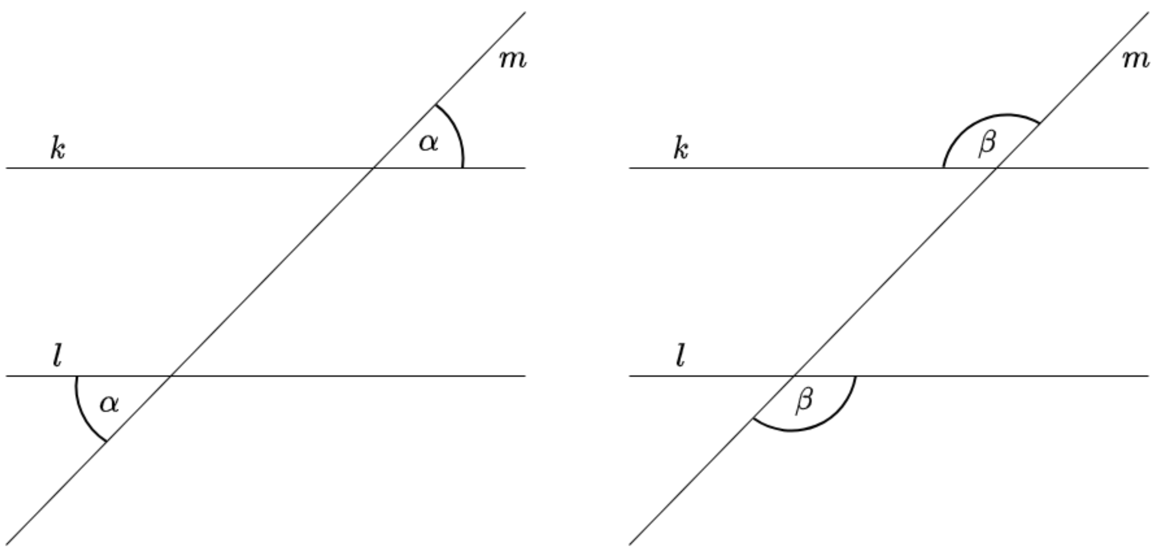


kąty naprzemianległe (zobacz rysunki 20 oraz 21):

Rysunek 20:



Rysunek 21:



7 Stereometria

Graniastosłupem/ostrosłupem prawidłowym nazywamy graniastosłup/ostrosłup, który ma w podstawie wielokąt foremny.

Liczba ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupa

Jeżeli graniastosłup ma n-kąt w podstawie, to wtedy ma:

- $n + 2$ ściany (n ścian bocznych i 2 podstawy)
- $3n$ krawędzi ($2n$ krawędzi podstawy i n krawędzi bocznych)
- $2n$ wierzchołków

Liczba ścian, krawędzi i wierzchołków ostrosłupa

Jeżeli ostrosłup ma n-kąt w podstawie, to wtedy ma:

- $n + 1$ ścian (n ścian bocznych i 1 podstawę)
- $2n$ krawędzi (n krawędzi podstawy i n krawędzi bocznych)
- $n + 1$ wierzchołków

Sześcian (zobacz rysunek 22):

Pole sześcianu:

$$P_c = 6a^2 \tag{19}$$

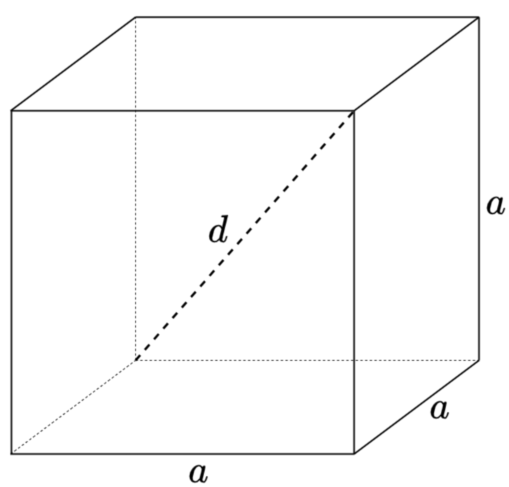
Objętość sześcianu:

$$V = a^3 \tag{20}$$

Przekątna sześcianu:

$$d = a\sqrt{3} \tag{21}$$

Rysunek 22:



Przekątna prostopadłościanu o krawędziach a, b oraz c (zobacz rysunek 23) dana jest wzorem:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{22}$$

Rysunek 23: